Render

โจทย์ข้อนี้มีคำสั่ง N คำสั่ง โดยคำสั่งจะมีสองแบบ

1. ใส่สินค้ามูลค่า i เข้าไปในเครื่อง
2. ถามว่าสินค้าที่มีมูลค่ามากสุดในเครื่องมีมูลค่าเท่าใดหากมีและเอาออกจากเครื่อง

โจทย์ข้อนี้แก้ได้ด้วย Priority Queue ซึ่งเป็นโครงสร้างข้อมูลที่มีประสิทธิภาพในการหาค่าสูงสุดของชุดข้อมูลที่อาจมีการเพิ่มเข้าหรือลบออก

ทั้งนี้ Priority Queue เป็นโครงสร้างข้อมูลที่มีอยู่ใน STL ซึ่งทำให้ข้อนี้แก้ได้ง่ายมากหากใช้ std::priority_queue โดยเพียงต้องใช้ฟังก์ชัน push เพื่อคำสั่งประเภทแรก และ top กับ pop สำหรับคำสั่งประเภทสอง

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้เป็นโจทย์ที่ต้องการสอนให้รู้จักการใช้ Priority Queue เฉลยนี้จะอธิบายโครงสร้าง Binary Heap ซึ่งเป็นวิธีที่พื้นฐานที่สุดสำหรับการเขียน Priority Queue (Priority Queue มีความหมายที่กว้างกว่า Binary Heap นอกจาก Binary Heap ยังมีโครงสร้างข้อมูลอื่นที่สามารถใช้เขียน Priority Queue เช่น Fibonacci Heap หรือ Binomial Heap)

Binary Heap

Binary Heap ที่ต้องการในข้อนี้จะต้องรองรับ Operation สองแบบคือ:
1. Push(i) ใส่ข้อมูลที่มีค่า i เข้าไปใน Heap
2. Pop() return ค่าสูงสุดใน Heap และเอาข้อมูลนั้นออกจาก Heap โดย Operation ทั้งสองมี Time Complexity $\mathcal{O}(\log{}N)$ และการเก็บ Heap มี Memory Complexity $\mathcal{O}(N)$ (เมื่อ N คือขนาดของ Heap)

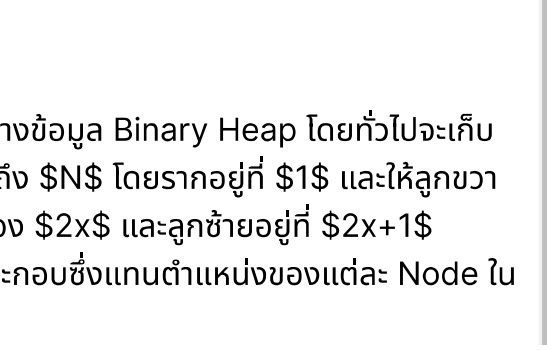
หลักการทำงานของ Heap

Heap เป็นโครงสร้างข้อมูลที่เก็บในลักษณะ Complete Binary Tree ซึ่งเป็น Binary Tree ประเภทหนึ่ง

Binary Tree เป็น Tree ที่แต่ละ Node มีลูกอย่างมาก 2 ตัว

Complete Binary Tree คือ Binary Tree ที่แต่ละชั้นจะมีจำนวน Node มากสุดที่เป็นไปได้ยกเว้นชั้นสุดท้ายซึ่งจะเก็บ Node ไว้ด้านซ้ายสุดก่อน นั่นคือในชั้นที่ h ของ Binary Tree ที่มีชั้น H เป็นชั้นสุดท้าย จะมี Node 2^h ตัวหาก $h < H$ และในชั้น H มีได้ตั้งแต่ 1 ถึง 2^H ตัว

นอกจากนี้ Heap จะรักษาคุณสมบัติว่าสำหรับ Node x ใดๆ ลูกของ Node x จะมีค่าไม่เกินค่าของ Node x ซึ่งจะทำให้ Node รากที่อยู่สูงสุดใน Heap เป็นค่าสูงสุดในทั้ง Heap



ในการ Implement โครงสร้างข้อมูล Binary Heap โดยทั่วไปจะเก็บเป็น Array จากช่องที่ 1 ถึง N โดยรากอยู่ที่ 1 และให้ลูกขวาของ Node ที่ช่อง x ที่ช่อง $2x$ และลูกซ้ายอยู่ที่ $2x+1$ (สังเกตตัวเลขแดงในภาพประกอบซึ่งแทนตำแหน่งของแต่ละ Node ใน Array)

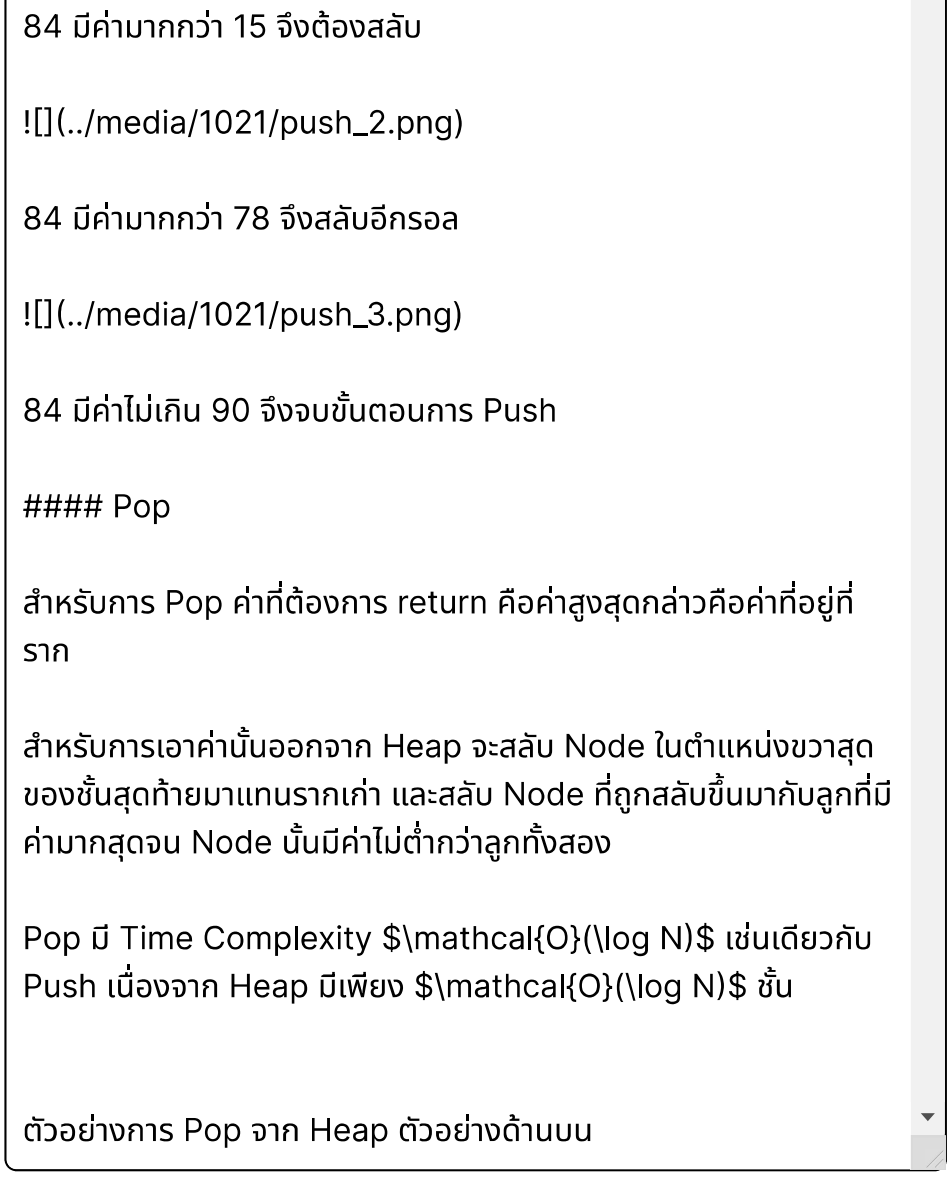
เนื่องจาก Binary Heap จัดเป็น Complete Binary Tree จะทำให้จำนวนชั้นของ Heap เป็น $\mathcal{O}(\log N)$ เมื่อ N คือจำนวนสมาชิกใน Heap

Push

สำหรับการ Push ค่า i จะใส่ค่า i เข้าไปที่ตำแหน่งซ้ายสุดของชั้นสุดท้ายที่ยังว่าง หากชั้นสุดท้ายเต็มแล้วจะใส่ในช่องซ้ายสุดของชั้นใหม่ จากนั้นจะสลับค่าที่เพิ่งใส่ไปกับ Node พ่อของมันจนกว่ามันมีค่าไม่เกิน Node พ่อ

เนื่องจากมีเพียง $\mathcal{O}(\log N)$ ชั้น จะมีการสลับอย่างมาก $\mathcal{O}(\log N)$ ครั้ง ซึ่งหมายความว่า Push มี Time Complexity $\mathcal{O}(\log N)$

ตัวอย่างการใส่ 84 เข้าไปใน Heap ตัวอย่างด้านบน



84 มีค่ามากกว่า 15 จึงต้องสลับ

84 มีค่ามากกว่า 78 จึงสลับอีกรอล

84 มีค่าไม่เกิน 90 จึงจบขั้นตอนการ Push

Pop

สำหรับการ Pop ค่าที่ต้องการ return คือค่าสูงสุดกล่าวคือค่าที่อยู่ที่ราก

สำหรับการเอาค่านั้นออกจาก Heap จะสลับ Node ในตำแหน่งขวาสุดของชั้นสุดท้ายมาแทนรากเก่า และสลับ Node ที่ถูกสลับขึ้นมากับลูกที่มีค่ามากสุดจน Node นั้นมีค่าไม่ต่ำกว่าลูกทั้งสอง

Pop มี Time Complexity $\mathcal{O}(\log N)$ เช่นเดียวกับ Push เนื่องจาก Heap มีเพียง $\mathcal{O}(\log N)$ ชั้น

ตัวอย่างการ Pop จาก Heap ตัวอย่างด้านบน

ช่อง x ที่ช่อง $2x$ และลูกซ้ายอยู่ที่ $2x + 1$ (สังเกตตัวเลขแดงในภาพประกอบซึ่งแทนตำแหน่งของแต่ละ Node ใน Array)

เนื่องจาก Binary Heap จัดเป็น Complete Binary Tree จะทำให้จำนวนชั้นของ Heap เป็น $\mathcal{O}(\log N)$ เมื่อ N คือจำนวนสมาชิกใน Heap

Push

สำหรับการ Push ค่า i จะใส่ค่า i เข้าไปที่ตำแหน่งซ้ายสุดของชั้นสุดท้ายที่ยังว่าง หากชั้นสุดท้ายเต็มแล้วจะใส่ในช่องซ้ายสุดของชั้นใหม่ จากนั้นจะสลับค่าที่เพิ่งใส่ไปกับ Node พ่อของมันจนกว่ามันมีค่าไม่เกิน Node พ่อ

เนื่องจากมีเพียง $\mathcal{O}(\log N)$ ชั้น จะมีการสลับอย่างมาก $\mathcal{O}(\log N)$ ครั้ง ซึ่งหมายความว่า Push มี Time Complexity $\mathcal{O}(\log N)$

ตัวอย่างการใส่ 84 เข้าไปใน Heap ตัวอย่างด้านบน

84 มีค่ามากกว่า 15 จึงต้องสลับ

84 มีค่ามากกว่า 78 จึงสลับอีกรอล

84 มีค่าไม่เกิน 90 จึงจบขั้นตอนการ Push

Pop

สำหรับการ Pop ค่าที่ต้องการ return คือค่าสูงสุดกล่าวคือค่าที่อยู่ที่ราก

สำหรับการเอาค่านั้นออกจาก Heap จะสลับ Node ในตำแหน่งขวาสุดของชั้นสุดท้ายมาแทนรากเก่า และสลับ Node ที่ถูกสลับขึ้นมากับลูกที่มีค่ามากสุดจน Node นั้นมีค่าไม่ต่ำกว่าลูกทั้งสอง

Pop มี Time Complexity $\mathcal{O}(\log N)$ เช่นเดียวกับ Push เนื่องจาก Heap มีเพียง $\mathcal{O}(\log N)$ ชั้น

ตัวอย่างการ Pop จาก Heap ตัวอย่างด้านบน

ค่าที่รากคือ 90 ซึ่งเป็นค่าที่ต้องการ return

สลับ Node ขวาสุดของชั้นสุดท้ายขึ้นมาเป็นรากใหม่

15 มีค่าน้อยกว่า 90 จึงสลับลงไป

15 มีค่าน้อยกว่า 85 จึงสลับลงไปอีก

15 มีค่าน้อยกว่า 30 จึงสลับลงไปอีก

จบขั้นตอนการ Pop เนื่องจากไม่มีลูกให้สลับลงไปอีก

Solution

เมื่อมี Priority Queue แล้วสำหรับแต่ละคำสั่งใน N คำสั่งที่ได้ เพียงต้อง Push สำหรับ P และ Pop สำหรับ Q

แต่ละคำสั่งใช้เวลา $\mathcal{O}(\log N)$ ไม่ว่าจะเป็น P หรือ Q ดังนั้น Time Complexity ของข้อนี้คือ $\mathcal{O}(N \log N)$

ภาพประกอบทำใน **https://visualgo.net/en**

PROGRAMMING.IN.TH

โปรแกรมมิ่งอินทีเอช ศูนย์รวมของโจทย์และเนื้อหาสำหรับ การเขียน
โปรแกรมเพื่อการแข่งขัน และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ค้นหาโจทย์

© 2019-2023 the PROGRAMMING.IN.TH team
We are open source on GitHub
สามารถใช้งานเว็บเก่าได้ที่ legacy.programming.in.th

System

Powered by **Vercel**