

【抽象代数】维数公式

线性变换

$$F^n \xrightarrow{A \text{左乘}} F^m$$

$$X \rightsquigarrow AX$$

矩阵 A 的行数小于列数， A 左乘相当于降维！

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 3 & -5 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & -1 & 4 & -5 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 5 & -1 & -4 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 3 & 1 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 & -2 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 19 \\ -22 \\ 7 \\ -20 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Mathematica 代码：

```
A = RandomInteger[{-5, 5}, {5, 9}];  
X = RandomInteger[{-5, 5}, {9, 1}];  
A.X
```

线性变换的核和像

核： $\ker T = \{\mathbf{v} \in V | T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$

像： $\text{im} T = \{T(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in V\}$

维数公式

设 $T: V \rightarrow W$ 是一个线性变换， V 是有限维向量空间，则有维数公式：

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\text{im} T)$$

核和像的维度，分别称为 T 的秩和零化度。

In[20]:= X = {{a, b, c, d, e, f, g, h, i}} // Transpose

[转置]

Out[20]= {{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {f}, {g}, {h}, {i}}

In[23]:= Solve[# == 0 & /@ Flatten[A.X], {a, b, c, d, e, f, g, h, i}] // Quiet // Flatten

[解方程]

[压平]

[不输出...]

[压平]

Out[23]=
$$\begin{cases} e \rightarrow -\frac{1673 a}{789} - \frac{524 b}{263} - \frac{309 c}{263} - \frac{1212 d}{263}, \\ f \rightarrow -\frac{716 a}{263} - \frac{777 b}{263} - \frac{802 c}{263} - \frac{1486 d}{263}, g \rightarrow \frac{123 a}{263} + \frac{521 b}{263} + \frac{378 c}{263} + \frac{926 d}{263}, \\ h \rightarrow \frac{2468 a}{789} + \frac{881 b}{263} + \frac{777 c}{263} + \frac{1845 d}{263}, i \rightarrow -\frac{695 a}{789} + \frac{70 b}{263} + \frac{231 c}{263} + \frac{1866 d}{263} \end{cases}$$

知乎 @姜很犟

In[25]:= X = {{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}} // Transpose

[转置]

Out[25]=

{{1}, {0}, {0}, {0}, {0}, {0}, {0}, {0}, {0}}

In[26]:= A.X

Out[26]=

{{-2}, {3}, {-1}, {5}, {2}}

知乎 @姜很犟

矩阵 A 的秩和零化度是多少?